

Matematik ve Sonsuz

Gerek konuşma vermeye gittiğim okullarda, gerek bana gelen okur mektuplarında, öğrenci ve öğretmenlerin matematikteki sonsuzluk kavramını pek iyi bilmediklerini gözlemledim. Örneğin, birçok kişi,

* Sonsuz eksi sonsuz,

* Sonsuz bölü sonsuz

gibi işlemlerin yapılabileceği sanıyor. Kimisi de “sonsuz eksi 1”in bir sayı olduğunu sanıyor, yani sonsuzdan hemen önce bir sayı olduğunu sanıyor.

Bu yazıda, matematikte kullanılan sonsuzluk kavramına biraz açıklık getirmek istiyorum.

“Sonsuz” dendiğinde, genellikle, çok uzakta, taa ötede, ulaşılamayacak bir yer düşünülür. Genel olarak, “sonsuz” sözcüğü bir yer adıymış gibi kullanılır. Bursa gibi, Balıkesir gibi, Fransa ya da Amerika gibi... Bursa’yla Sonsuz arasındaki tek ayrım, Sonsuz’a hiç ulaşamamasıdır.

Kimi zaman da, “sonsuz” dendiğinde çok büyük bir miktar akla gelir, sayılamayacak kerte büyük bir miktar... Bu ikinci anlam, “sonsuz”un matematiksel anlamına daha yakındır.

Günlük yaşamda kullanılan anlamda bir “sonsuz”un gerçekte (doğada, evrende, uzayda...) olup olmadığı ayrı bir tartışma konusudur. Belki de bu anlamda “sonsuz”, imgelemin bir ürünüdür ve doğada yoktur. Ama bizim konumuz, sonsuzun varlığı ya da yokluğu değil, tanımı. Biraz daha açayım: “Sonsuz”un ne demek olduğunu tanımlamak başkadır, “sonsuz”un var olduğunu ya da olmadığını kanıtlamak başka. Yani, kavramın tanımıyla varlığı bambaşka sorulardır.

Ben, bu yazıda daha çok “sonsuz”un matematiksel tanımıyla ilgileneceğim. Konumuz felsefe değil. Yazının sonunda, matematikte sonsuzun varlığı konusuna şöyle bir değineceğim.

Yukarda, “sonsuz” sözcüğüne günlük yaşamda verdiğimiz anlamdan kısaca sözettim. Matematikte “sonsuz”un bambaşka bir anlamı vardır. Günlük yaşamda kullanılan “sonsuz”un tam ne demek olduğunu pek iyi bilmiyorsak da, matematikte “sonsuz” sözcüğünün kesin bir anlamı vardır.

Popüler matematik yazılarımın birçoğunda, günlük yaşamda kullanılan “sonsuz” kavramının bu belirsizliğinden yararlanıp çatışkılar (paradokslar) sundum okura. Bu çatışkılar bugün artık bir çatışkı değilse de, pek yakın bir zamana dek çatışkıydılar. Çünkü matematiğin “sonsuzluk” kavramı bir yüzyıl öncesine değin pek açık seçik bilinmiyordu. “Sonsuz” konusunda büyük bir kargaşa vardı. Kerli felli adamlar “sonsuz” kavramı üzerinde birbirleriyle anlaşamıyorlar, bu ayrılıktan dolayı birbirlerine küsüyorlardı. Kümeler kuramının gelişmesiyle birlikte (Georg Cantor sayesinde), matematikte “sonsuz”un ne anlama gelmesi gerektiği anlaşıldı.

Matematikteki “sonsuz” kavramına açıklık getirilmesinin püf noktası şudur: “Sonlu”nun ne demek olduğunu anlarsak, “sonsuz”un da ne demek olduğunu anlarız, çünkü “sonsuz”, “sonlu”nun karşıtıdır, sonlu olmayana sonsuz deriz¹.

Matematikte “sonsuz” bir nitemdir (sıfattır), bir ad değildir. Nasıl “sonlu” bir nitemse (sıfatsa), matematikte kullanılan “sonsuz” da bir nitemdir. Sonsuz, sonlunun karşıtıdır. Matematikte sonlu olmayana sonsuz denir.

¹ Bu tanımın “sonsuz”u gerçekten tanımlayabilmesi için, “sonlu”nun ne demek olduğunu bilmemiz gerekir. Matematikte “sonlu”nun birçok tanımı verilebilir. Bütün bu tanımlar birbirleriyle eşdeğer tanımlardır elbette. Yani bir tanım için sonlu olan küme, bir başka tanım için de sonludur. Burada, matematikte “sonlu”nun tanımını vermeyeceğiz. Okurun, bu tanımı sezgisıyla bildiğini varsayacağız.

Adına “sonsuz” denilen matematiksel bir nesne yoktur. Ama sonsuz matematiksel nesnelere vardır.

Nasıl “sarı”, “yeşil”, “uzun”, “sıcak” birer nitelendirir, matematikteki “sonsuz” sözcüğü de bir nitelendirir.

Matematikte, adı “sonlu” olan bir nesne olmadığı gibi, “sonsuz” diye de bir nesne yoktur.

Yineliyorum: Matematikte, “sonlu” ve “sonsuz” sözcükleri birer nitelendirirler. Örneğin, “sonlu sayı” terimindeki “sonlu” sözcüğü “sayı” sözcüğünü niteler. Bunun gibi, “sonsuz sayı” terimindeki “sonsuz” sözcüğü “sayı”yı niteler. (Matematik bölümünde okumamış bir okurun sonsuz sayı kavramını, hatta sonlu sayı kavramını da, bildiğini sanmıyorum.)

Matematikte 5 bir nesnedir. 1 de bir nesnedir. Dolayısıyla 5’ten 1’i çıkarabiliriz ve 4 nesnesini buluruz.

Ama “sonsuz”, bir nesne olmadığından, matematikte $\infty - 1$ diye bir nesne yoktur ve $\infty - 1$ ’in yazılmaması gerekir. Bir nitelendirmeden bir nesne çıkaramayız.

Bu kavram karışıklığının suçlusu öğrenciler değil, elbette... Öğrenci hiçbir zaman suçlu olamaz. Lise öğrencilerine, bugünkü eğitim sistemimizde, “sonsuz”un tam matematiksel anlamı anlatılamaz. Bugünkü eğitim sistemimizde, din bilgisi gibi, savunma bilgisi gibi, trafik bilgisi gibi, ticaret gibi çok daha yararlı (!) ve sığ dersler okutulmaktadır. Öğrenciler haftada 4 saat matematik görürlerse ne âlâ!

Eğitim sistemimizin olduğu kadar biz matematikçilerin de suçu var bu kavram karışıklığında. Matematikçiler, “sonsuz”u çoğu kez bir ad gibi kullanırlar. Örneğin, sanki sonsuz bir yer adımı gibi, “ n sonsuza gittiğinde” derler. Hatta görmüşsünüzdür, $\lim_{n \rightarrow \infty}$ yazarlar. Bu tümceciğe, “sonsuz” sanki bir yer adımı gibi kullanılmış. Yanlış! Matematikte “sonsuz” diye bir yer yoktur.

Asıl suçlu ∞ simgesi. Ortaöğretimde, matematiksel semboller genellikle nesnelere için kullanılır. Boşküme bir nesnedir ve simgesi \emptyset ’dir örneğin. Oysa ∞ simgesi, bir nesnenin simgesi değildir.

Bu yüzden “ n sonsuza gittiğinde” dememek gerekir. Onun yerine, “ n durmadan büyüdüğünde, yani her tamsayıyı bir süre sonra aştığında” demek daha doğru olur.

Matematikçiler,

Sonsuz eksi sonsuz, $\infty - \infty$

Sonsuz bölü sonsuz, ∞/∞

demez ve yazmazlar. Yazdıklarında da bunun ne demek olduğunu açıklamak zorundadır. Ama kimi zaman, matematikçi,

$$\infty + 1 = \infty$$

$$\infty - 1 = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty / 2 = \infty$$

$$2 \times \infty = \infty$$

yazabilir. Burada, matematikçinin söylemek istediği,

- * Sonsuz artı 1, sonsuza eşittir
- * Sonsuz eksi 1, sonsuza eşittir
- * Sonsuz artı sonsuz, sonsuza eşittir
- * Sonsuz bölü 2, sonsuza eşittir
- * İki kere sonsuz, sonsuza eşittir

değildir. Matematikçi sırasıyla şunları söylemek istiyordur:

- * Durmadan büyüyen bir değişkenden 1 çıkarırsak, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- * Durmadan büyüyen bir değişkene 1 eklersek, elde ettiğimiz değişken de durmadan büyür,
- * İki değişken durmadan büyüyorsa, o değişkenlerin toplamı da durmadan büyür,
- * Durmadan büyüyen bir değişkeni ikiye bölersek, gene durmadan büyüyen bir değişken elde ederiz,
- * Durmadan büyüyen bir değişkeni ikiyle çarparsak, gene durmadan büyüyen bir değişken elde ederiz.

Ta eski Yunanlılardan beri, matematikçiler ve filozoflar “sonsuz” ve “sonsuzluk” üzerine kafa yormuşlardır. Geçen yüzyılda, matematiğin sonsuzluk kavramını Alman matematikçi Georg Cantor biçimselleştirdi. Cantor’a göre sonsuz bir sıfattır. O gün bu gün, matematikçiler “sonsuz”u ad olarak değil, sıfat olarak kullanırlar.

Matematikte sonsuz bir nesnenin² varlığı konusuna gelince³...

Matematikte sonsuz bir nesnenin varlığı (böyle bir nesnenin varlığını kabul eden bir belit/aksiyom olmadan) kanıtlanamaz. Öte yandan matematikçiler “sonsuz” nesnelere söz edebilmek isterler. Matematikçi sonlu nesnelere baktığında, kimi zaman sonsuzu görür gibi olur, yani “sonsuz,” sonlunun arasından kendini gösterir, kendini belli eder. Dolayısıyla matematikçi sonsuz nesnelere varlığını kanıtlayamasa da, sonsuz nesnelere söz edebilmek ister. Bir örnek vereyim.

0, 1, 2, 3, 4 gibi doğal sayılar sonlu matematiksel nesnelere (yani kümelerdir.) Peki, ya bu doğal sayılardan oluşan nesne? Yani

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

nesnesi? Bu nesnenin sonsuz olduğunu (yani sonsuz tane öge içerdiğini) biliyoruz. Biliyoruz ama, matematikte böyle bir nesne var mıdır? Yani bu nesne, matematikte sözünü edebileceğimiz bir küme midir⁴?

Bu nesnenin bir küme olduğu “sonlu matematikte⁵” kanıtlanamaz.

Madem varlığını kanıtlayamıyoruz ama öyle bir nesnenin bir küme olmasını istiyoruz, biz de matematikte böyle bir kümenin olduğunu varsayalım, yani bu nesneyi küme yapacak bir beliti (aksiyomu) matematiğe sokalım... Böylece, matematikte sonsuz bir küme belirir... Daha önce yoktu, bir belitle var ettik!

Ve bu beliti kullanarak matematikte sonsuz bir nesnenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Doğada sonsuz bir nesnenin olup olmadığı tartışmasını okurlara ve filozoflara bırakıyorum. Ben, bu konudaki düşüncelerimi, Matematik ve Doğa adlı kitabımın aynı başlıklı yazısında açıklamıştım.

² “Kümenin” demek istiyorum.

³ Dikkat: “Sonsuz” adı verilen bir nesneden söz etmiyorum, öge sayısı sonsuz olan bir kümeden söz ediyorum.

⁴ Matematikte küme olmasını arzu ettiğimiz her nesneyi küme varsayarsak, matematikte bir çelişki elde ederiz. Matematik ve Korku adlı kitabımdaki *Bertrand Russell’in Paradoksu* yazısı bu konuyu işlemektedir.

⁵ Yani sonsuz kümelerin var olduğunu söyleyen bir belitin yardımı olmaksızın.